

ших числах Рейнольдса турбулентного пограничного слоя на плоской пластине // Изв. РАН. МЖГ. – 1993. – N 4. – С. 106–117.

2. Вигдорович И.И. Универсальный закон дефекта скорости для турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом и отсосом // Докл. АН России. – 1993. – Т. 331. – N 4. – С. 443–448.

3. Вигдорович И.И. Универсальный закон трения для турбулентного пограничного слоя на пластине с отсосом // Докл. АН России. – 1997. – Т. 356. – N 1. – С. 42–46.

4. Вигдорович И.И. Турбулентный пограничный слой на пластине с интенсивным отсосом // Изв. РАН. МЖГ. – 1999. – N 3. – С. 61–76.

5. Вигдорович И.И. Универсальный закон трения для турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом // Докл. АН России. – 1994. – Т. 337. – N 1. – С. 39–43.

БЕЗВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ОБТЕКАНИЯ СТУПЕНИ

Е. Р. Газизов, Д. В. Маклаков

НИИММ Казанского государственного университета

1. Постановка задачи и сведение ее к решению нелинейного интегрального уравнения. Рассматривается стационарное потенциальное течение слоя идеальной несжимаемой весомой жидкости над неровным полигональным дном в форме наклонной ступени (рис. 1). Отыскиваются безволновые решения для различных режимов обтекания. Вводится декартова система координат (x, y) , причем ее начало лежит в основании ступени. Задаются h – глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности, V_0 – скорость набегающего потока, $\beta\pi$ – угол наклона ступени к оси Ox , g – ускорение силы тяжести. Сила тяжести действует в направлении, обратном направлению оси Oy .

Отобразим область течения в физической плоскости $z = x + iy$ на полосу $D_t = \{0 < \eta < \pi/2\}$ в плоскости комплексного переменного $t = \xi + i\eta$ так, чтобы бесконечно удаленные точки перешли в бесконечно удаленные, а угловые точки дна B и D – в точки $t = 0$ и $t = d$ соответственно.

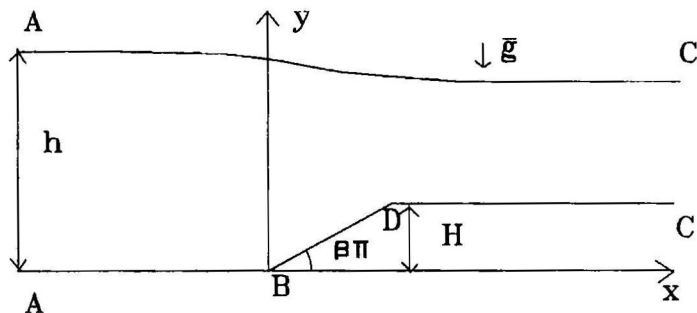


Рис. 1

Введем аналитическую функцию

$$\chi(t) = \ln \left(\frac{\pi}{2h} \frac{dz}{dt} \right) = r + i\theta$$

и обозначения

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \chi(t) = r^0(\xi), & \operatorname{Im} \chi(t) = \Theta^0(\xi), & t = \xi, & -\infty < \xi < \infty, \\ \operatorname{Re} \chi(t) = r^1(\xi), & \operatorname{Im} \chi(t) = \Theta^1(\xi), & t = \xi + i\pi/2, & -\infty < \xi < \infty. \end{cases}$$

Если найдена функция $\chi(t)$, то искомое конформное отображение $z(t)$ определяется интегралом

$$z(t) = \frac{2h}{\pi} \int_0^t e^{\chi(t)} dt,$$

а комплексно-сопряженная скорость dW/dz выражается так:

$$\frac{dW}{dz} = V_0 e^{-\chi(t)}. \quad (1)$$

Поставим краевую задачу для аналитической в области D_t функции $\chi(t)$.

На свободной поверхности при $\eta = \pi/2$ функция $\chi(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{dr^1}{d\xi} = \frac{2}{\pi F r^2} e^{3r^1} \sin \Theta^1. \quad (2)$$

На дне при $\eta = 0$ функция $\chi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \Theta^0 = 0, & \text{если } \xi \leq 0, \quad \xi \geq d, \\ \Theta^0 = \beta\pi, & \text{если } 0 < \xi < d. \end{cases} \quad (3)$$

Так как в выражениях (2), (3) присутствует неизвестный параметр d , определяющий в параметрической плоскости положение точки D , то для замыкания задачи необходимо вывести дополнительное соотношение. При выводе этого условия существенным является режим обтекания ступени. Движение несжимаемой жидкости считается докритическим в случае, когда $Fr < 1$, и сверхкритическим, когда $Fr > 1$, где $Fr = V_0/\sqrt{gh}$.

Рассмотрим докритическое обтекание ступени. В этом случае высота ступени в физической плоскости не задается, а определяется из требования отсутствия волн слева на бесконечности. Предположим, что $\chi(t)$ ведет себя слева на бесконечности следующим образом:

$$\chi(t) \sim Ae^{kt} \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \quad \text{где } A = \text{const.} \quad (4)$$

Линеаризуя (2), получим

$$\frac{dr^1}{d\xi} - \frac{2}{\pi Fr^2} \Theta^1 = 0,$$

после чего, используя (4), найдем соотношение, связывающее показатель экспоненты k и число Фруда:

$$k \operatorname{ctg}(\pi k/2) = \frac{2}{\pi Fr^2}.$$

Легко видеть на графике функции $y = \operatorname{ctg} x$, что при $Fr > 1$ показатель $k < 1$, и наоборот, при $Fr < 1$ показатель $k \geq 1$.

Благодаря условию (4), при $Fr < 1$ возможно интегрирование функции $\chi(t)e^{-t}$ по границе полосы D_t , при этом бесконечно удаленные точки обходятся по вертикальным отрезкам прямых. В результате интегрирования получим замыкающее задачу условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr^1}{d\xi} e^{-\xi} d\xi = \beta\pi(e^{-d} - 1). \quad (5)$$

Условия (2), (3) и (5) определяют краевую задачу отыскания аналитической в области D_+ функции $\chi(t)$ и параметра d , определяющего высоту ступени в плоскости t , в случае докритического обтекания.

Теперь рассмотрим сверхкритическое обтекание ступени. В этом случае высота ступени H – заданная величина.

Для любых течений над ступенью, у которых свободная поверхность имеет горизонтальные асимптоты слева и справа на бесконечности, справедливы формулы [1]:

$$Fr^2 + 2 = \frac{Fr^2}{(L - H/h)^2} + 2L, \quad (6)$$

$$Fr(\infty) = \frac{Fr}{(L - H/h)^{3/2}}. \quad (7)$$

Здесь $L = y(\infty)/h$, $y(\infty)$ – ордината свободной поверхности справа на бесконечности, h – глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности, H – высота ступени в физической плоскости, $Fr(\infty)$ – число Фруда справа на бесконечности.

Воспользовавшись (6) и (7), легко найдем ординату свободной поверхности справа на бесконечности $y(\infty)$. После этого, используя интеграл Бернулли и (1), выведем необходимое выражение

$$r^1(\infty) = -\frac{1}{2} \ln[1 - \frac{1}{Fr^2}(L - 1)], \quad (8)$$

где $L = y(\infty)/h$ – известная величина, являющаяся корнем уравнения (6).

Полученная система (2), (3), (8) представляет собой замкнутую систему соотношений для определения функции $\lambda(\xi)$ и параметра d в случае сверхкритического обтекания.

Каждая из краевых задач (2), (3), (5) и (2), (3), (8) может быть сведена к решению системы нелинейных интегральных уравнений.

Решим вспомогательную задачу и выразим функцию $\Theta^1(\xi)$ через $r^1(\xi)$. Для этого сначала найдем решение смешанной краевой задачи определения функции $\chi_1(t) = i\chi(t)$ по заданной действительной части на нижней и мнимой – на верхней границе полосы

[2]

$$\chi_1(t) = \frac{i}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^1(\xi) d\xi}{\operatorname{ch}(\xi - t)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Theta^0(\xi) d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - t)} \right].$$

Затем, разделив действительную и мнимую части функции $\chi(t)$ при $t = s + i\pi/2$, с помощью (3) найдем требуемое выражение в операторном виде

$$\theta^1 = Br^1 + \lambda_2, \quad (9)$$

где B – линейный сингулярный оператор (интеграл понимается в смысле главного значения),

$$Br^1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^1(\xi) d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - s)} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{s-\varepsilon} \frac{r^1(\xi) d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - s)} + \int_{s+\varepsilon}^{+\infty} \frac{r^1(\xi) d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - s)} \right],$$

$$\lambda_2(s) = 2\beta(\operatorname{arctge}^{d-s} - \operatorname{arctge}^{-s}).$$

Введем обозначение

$$\frac{dr^1}{d\xi} = \lambda(\xi), \quad (10)$$

тогда

$$r^1 = \int_{-\infty}^s \frac{dr^1}{d\xi} d\xi = \int_{-\infty}^s \lambda(\xi) d\xi = C\lambda, \quad (11)$$

где C – линейный оператор. Теперь, используя (9), (10), (11) и обозначив $B(C\lambda) = D\lambda$, перепишем (1) окончательно в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\lambda(\xi) = \frac{2}{\pi F r^2} e^{3C\lambda} \sin(D\lambda + \lambda_2). \quad (12)$$

Через функцию $\lambda(\xi)$ условие (5) выражается так:

$$E(\lambda e^{-\xi}) = \beta\pi(e^{-d} - 1), \quad (13)$$

где функционал

$$Eq = \int_{-\infty}^{+\infty} q(\xi) d\xi.$$

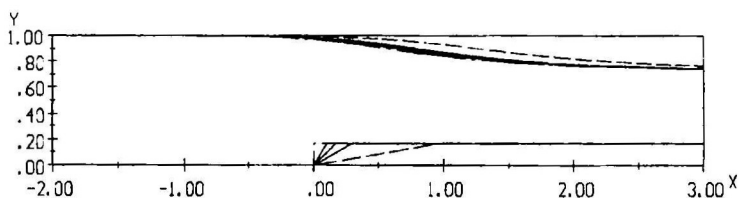


Рис. 2

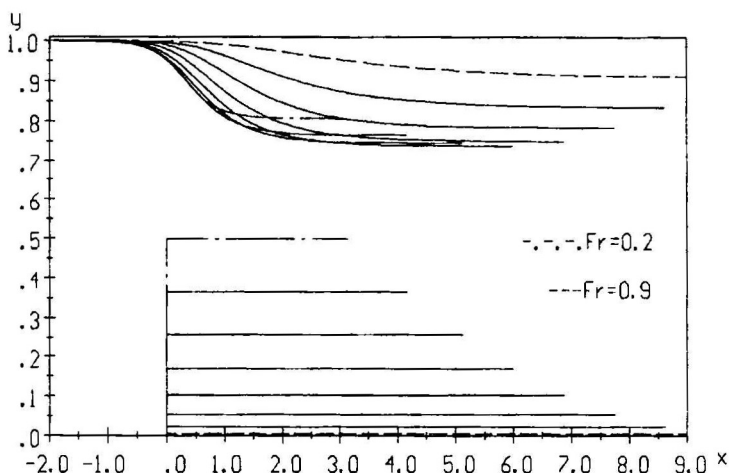


Рис. 3

Системы (8), (12) и (12), (13) представляют собой замкнутые системы уравнений для определения функции $\lambda(\xi)$ и параметра d и после дискретизации решаются методом Ньютона.

2. Числовые расчеты. Были проведены расчеты для случая, когда докритическое течение переходит в сверхкритическое. На рис. 2 показаны формы свободной поверхности при фиксированном числе Фруда ($Fr = 0.5$) для различных углов наклона ступени ($\beta = 1/6, 1/4, 1/3, 1/2$). На рис. 3 приведены формы свободной поверхности при фиксированном $\beta = 0.5$ для диапазона чисел Фруда ($0.2 \leq Fr \leq 0.9$). Получить решение этого типа для $H < 0$ не удалось.

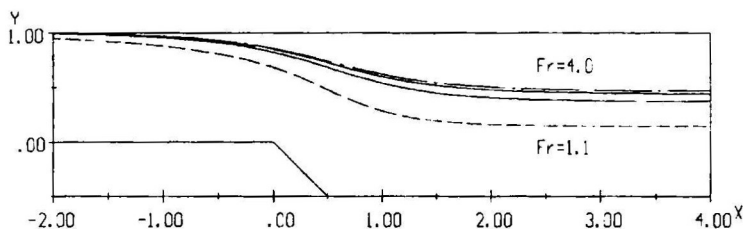


Рис. 4

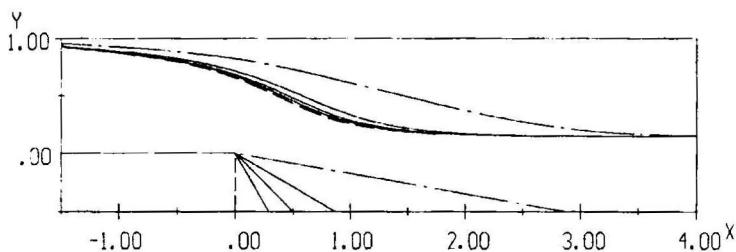


Рис. 5

Числовые расчеты были проведены также для режима обтекания, при котором сверхкритическое течение переходит в сверхкритическое. Задается число Фруда, угол наклона ступени, а также H – высота ступени в физической плоскости. На рис. 4 показаны формы свободной поверхности при фиксированном наклоне ступени ($\beta = -1/4$) и отношении $H/h = -0.5$ для различных чисел Фруда ($Fr = 1.1; 2.0; 3.0; 4.0$). На рис. 5 показаны формы свободной поверхности при фиксированных числе Фруда ($Fr = 1.1$) и отношении $H/h = -0.5$ для различных углов наклона ступени ($\beta = -1/2; -1/3; -1/4; -1/6; -1/18$). Из рисунка видно, что с уменьшением угла растет отклонение свободной поверхности от поверхности ступени.

ЛИТЕРАТУРА

1. King A.C., Bloor M.I.G. *Free-surface flow over a step* // J. Fluid Mech. – 1987. – V. 182. – P. 103–208.
2. Киселев О.М., Котляр Л.М. *Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – 108 с.